第27卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 6
2010年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1035-06

具有小周期参数抛物型方程双尺度有限元分析*

曹俊英[1,2]， 王自强[2,3]， 宋士仓[4]

(1- 厦门大学数学科学学院，厦门 361005； 2- 贵州民族学院理学院，贵阳 550025；
3- 中国科学院数学与系统科学研究院 计算数学与科学工程计算研究所，北京 100190；
4- 郑州大学数学系，郑州 450052)

摘 要: 本文研究了二维空间中光滑的凸区域上具有小周期参数的抛物型方程的半离散双尺度有限元逼近。在整个区域上，利用二次元解均匀化问题；在参考单胞内，利用线性元解辅助问题；然后，将求得的有限元解代入多尺度渐近展开式，得到原问题解的一个半离散双尺度有限元格式。利用多尺度渐近展开和有限元理论，证明了该格式的收敛性。

关键词: 多尺度渐近展开；双尺度有限元；抛物型方程；复合材料

分类号: **AMS**(2000) 65N30; 65N15 **中图分类号**: O242.2 **文献标识码**: A

1 引言

随着计算机软硬件的发展，出现了许多涉及具体物理问题的算法与理论。但对于小周期复合材料的计算，若$0<\varepsilon\ll 1$时，$a_{ij}^{\varepsilon}(x)$变化非常频繁，用差分或有限元等数值求解时，网格剖分都要求非常细，这样导致最终求解线性方程组的计算量非常大。针对此类问题，发展起来了均匀化和多尺度渐近展开方法，即在宏观尺度上求均匀化问题，在微观尺度上增加校正项，用均匀化解和校正项构成原始解的渐近展开式，从而降低了计算量。文献 [1] 中给出了均匀化理论并对椭圆型方程作了多尺度渐近展开式，文献 [2-7] 从不同方面对文献 [1] 中的结果作了改进。此外，文献 [8] 中又给出了解决椭圆型方程的一种新思路，文献 [9,10] 又利用 HMM 方法分别讨论了抛物型方程和 Helmholtz 方程的多尺度计算。文献 [11] 中首次给出抛物型方程的渐近展开式和收敛性分析。本文利用文献 [2] 中提出的双尺度有限元方法和文献 [8-13] 中的思想，对抛物型方程给出一种半离散双尺度有限元格式及其收敛性分析。

2 预备知识和已有结论

本文考虑如下问题

$$\begin{cases} u_{\varepsilon}^{'}(x,t)-\nabla\cdot(a^{\varepsilon}(x)\nabla u_{\varepsilon}(x,t))=f(x,t), & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u_{\varepsilon}(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u_{\varepsilon}(x,0)=u^{0}(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$u_{\varepsilon}^{'}(x,t)=\frac{\partial u_{\varepsilon}(x,t)}{\partial t},\quad a^{\varepsilon}(x)=(a_{ij}^{\varepsilon}(x))_{2\times 2},\quad i,j=1,2,$$

收稿日期: 2008-01-14. **作者简介**: 曹俊英 (1981年生)，女，博士，讲师. 研究方向：偏微分方程数值计算.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10471133)；重点项目基金 (90405016)；重大项目基金 (10590353).

它们是以ε为周期的周期函数。设$y=\frac{x}{\varepsilon}$，若$(a_{ij}(y))_{2\times 2}\in M(\alpha,\beta)$，表示存在常数$0<\alpha<\beta$，使得

$$\alpha\sum_{i=1}^{2}\eta_i^2\leq a_{ij}(y)\eta_i\eta_j\leq\beta\sum_{i=1}^{2}\eta_i^2,\quad\forall\,(\eta_i,\eta_j)\neq(0,0).\tag{2}$$

文中采用Einstein求和记号，出现的$Q=[0,1]\times[0,1]$均表示参考单胞，常数C大小可能不相等，但都与ε无关。为使考虑的问题是适定的，设$f\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$，$u^0(x)\in L^2(\Omega)$且当$x\in\partial\Omega$时$u^0(x)=0$。此外，$(\cdot,\cdot)_D$表示$L^2(D)$中的内积，$\|\cdot\|_{r,D}$表示$H^r(D)$中的模，当下标为$\Omega$时可以省略。

由均匀化理论知，(1)的均匀化问题为

$$\begin{cases}u'(x,t)-\nabla\cdot(a^0\nabla u(x,t))=f(x,t), & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u^0(x), & x\in\Omega,\end{cases}\tag{3}$$

这里

$$y=\frac{x}{\varepsilon},\quad a^0=(a_{ij}^0)_{2\times 2},\quad a_{ij}^0=-\int_Q\Big(a_{ij}-a_{ik}\frac{\partial N_j}{\partial y_k}\Big)\mathrm{d}y,$$

其中N_k, $N_{kl}\in H_0^1(Q)$满足

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial N_k}{\partial y_j}\Big)=\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_i},$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial N_{kl}}{\partial y_j}\Big)=-a_{kl}^0-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial(a_{ij}\delta_{kj}N_l)}{\partial y_i}-\sum_{j=1}^{2}a_{kj}\frac{\partial(N_l-y_l)}{\partial y_i}.\tag{4}$$

设$u_\varepsilon(x,t)$具有下面形式的渐近展开式

$$u_\varepsilon^I(x,t)=u(x,t)-\varepsilon N_k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}+\varepsilon^2N_{kl}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x_k\partial x_l}.\tag{5}$$

利用文献[11]的证明方法，可得：

引理2.1 设Ω是R^2中的光滑凸区域

$$f\in C^1(0,T;H^2(\Omega)),\quad a_{ij}^\varepsilon(x)\in L^\infty(\Omega),\quad i,j=1,2,$$

且$(a_{ij}^\varepsilon(x))_{2\times 2}\in M(\alpha,\beta)$，$u_\varepsilon(x,t)$渐近展开式如(5)所示。如果$u\in C^1(0,T;H^4(\Omega))$，$N_k$，$N_{kl}\in W^{1,\infty}(Q)$ $(k,l=1,2)$，则有下面的估计

$$\Big\|u_\varepsilon(x,t)-\Big(u(x,t)-\varepsilon N_k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}+\varepsilon^2N_{kl}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x_k\partial x_l}\Big)\Big\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\leq C\varepsilon+C\varepsilon^{1/2},\tag{6}$$

这里C与ε无关。

利用文献[2]中引理3.2的证明方法，可以证明：

引理2.2 $\|N_k(\frac{x}{\varepsilon})\|_{0,\Omega}\leq C_1\varepsilon|N_k(\frac{x}{\varepsilon})|_{1,\Omega}\leq C_2$且$|N_k(\frac{x}{\varepsilon})|_{2,\Omega}\leq C\varepsilon^{-2}$，$k=1,2$。

引理2.3 $\|N_{kl}(\frac{x}{\varepsilon})\|_{0,\Omega}\leq C_1\varepsilon|N_{kl}(\frac{x}{\varepsilon})|_{1,\Omega}\leq C_2$且$|N_{kl}(\frac{x}{\varepsilon})|_{2,\Omega}\leq C\varepsilon^{-2}$，$k,l=1,2$。

3　高-低阶的双尺度有限元分析

由渐近展开式 (5) 知，若要获得问题 (1) 的数值解，需利用有限元求解 $u(x,t)$, N_k 和 N_{kl}。这里我们用二次 Lagrange 元在 Ω 上求解 $u(x,t)$，而应用线性 Lagrange 元在 Q 上求解 N_k 和 N_{kl}。

设 $\mathcal{T}_h$ 为 Q 的拟一致剖分，剖分半径为 h 且 $V_h \subset H_0^1(Q)$ 是 $\mathcal{T}_h$ 上的线性协调有限元空间。那么 N_k 的有限元近似为：求 $N_k^h \in V_h$，满足

$$\left(a_{ij}\frac{\partial N_k^h}{\partial y_j}, \frac{\partial v}{\partial y_i}\right)_Q = \left(a_{ik}, \frac{\partial v}{\partial y_i}\right)_Q, \quad \forall\, v \in V_h. \tag{7}$$

利用经典的有限元证明方法，可以得到下面结果：

引理 3.1　若 $N_k \in W_\infty^2(Q)$，则有

$$\|N_k - N_k^h\|_{L^2(Q)} + h|N_k - N_k^h|_{H^1(Q)} \le Ch^2|N_k|_{H^2(Q)},$$

$$\|N_k - N_k^h\|_{L^\infty(Q)} + h|N_k - N_k^h|_{W_\infty^1(Q)} \le Ch^2 \ln h|N_k|_{W_\infty^2(Q)}.$$

为近似求解均匀化问题 (3)，我们用 N_j^h 代替

$$a^0 = (a_{ij}^0)_{2\times 2}, \quad a_{ij}^0 = -\int_Q \left(a_{ij} - a_{ik}\frac{\partial N_j}{\partial y_k}\right)\mathrm{d}y$$

中的 N_j 得到 a^0 的一个近似 $a_h^0 = (a_{ij}^{0,h})$，其中

$$a_{ij}^{0,h} = -\int_Q \left(a_{ij} - a_{ik}\frac{\partial N_j^h}{\partial y_k}\right)\mathrm{d}y.$$

利用文献 [2] 中的方法，可以证明下面结论：

引理 3.2　设 $N_j \in H^2(Q)$，则有

$$|a_{ij}^{0,h} - a_{ij}^0| \le Ch^2|N_i|_{H^2(Q)}|N_j|_{H^2(Q)}.$$

设 Ω 的一个剖分为 $\mathcal{T}_{h_0}$，h_0 为剖分半径，设 V_{h_0} 为 $\mathcal{T}_{h_0}$ 上的二次协调有限元空间。对于 (3) 式，其半离散双尺度有限元格式为

$$\begin{cases} (\widehat{u}'_{h_0}(x,t), v) + (a_h^0 \nabla \widehat{u}_{h_0}, \nabla v) = (f, v), & \forall\, v \in V_{h_0}, \\ \widehat{u}(x,0) = u_{h_0}^0(x), & \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

设 $u^0(x) \in H^3(\Omega)$ 且

$$\|\nabla u^0(x) - \nabla u_{h_0}^0(x)\|_{0,\Omega} \le Ch_0^2\|u^0(x)\|_{3,\Omega},$$

$$\|u^0(x) - u_{h_0}^0(x)\|_{0,\Omega} \le Ch_0^3\|u^0(x)\|_{3,\Omega},$$

利用引理 3.1，引理 3.2 和文献 [12] 中的证明技巧，则有下面结果：

引理 3.3　设 $u(x,t)$ 和 $\widehat{u}_{h_0}(x,t)$ 分别为 (3) 和 (8) 的解，若 $u(x,t) \in H^3(\Omega)$，$N_k \in H^2(Q)$。则有

$$\|u - \widehat{u}_{h_0}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C(h^2 + h_0^2).$$

求 N_{kl} 有限元近似求解为：求 $N_{kl}^h(y)\in V_h$ 满足

$$\Big(a_{ij}(y)\frac{\partial N_{kl}^h(y)}{\partial y_j},\ \frac{\partial v}{\partial y_i}\Big)_Q=\Big(-a_{kl}^{0,h}-\frac{\partial(a_{ij}\delta_{kl}N_l^h)}{\partial y_i}-a_{kl}\frac{\partial(N_l^h-y_l)}{\partial y_j},\ v\Big)_Q,\quad \forall\, v\in V_h. \tag{9}$$

利用标准的有限元理论，引理3.1和引理3.2，则有下面结果。

引理3.4 设 $N_k\in H^2(Q)(k=1,2)$，则有

$$\|N_{kl}-N_{kl}^h\|_{1,Q}\le Ch\|N_l\|_{2,Q},$$

$$\|N_{kl}-N_{kl}^h\|_{W_\infty^1(Q)}\le Ch\|N_l\|_{W_\infty^2(Q)}.$$

最后，我们给出 u_ε 的近似计算公式为

$$u_{h_0}^{\varepsilon,h}=\widehat{u}_{h_0}-\varepsilon N_k^h\frac{\partial\widehat{u}_{h_0}}{\partial x_k}+\varepsilon^2N_{kl}^h\frac{\partial^2\widehat{u}_{h_0}}{\partial x_k\partial x_l},$$

对于 $v|_T\in H^1(T)$, $T\in\mathcal{T}_{h_0}$，定义

$$\|v\|_{1,h_0}=\Big(\int_0^T\sum_{T\in\mathcal{T}_{h_0}}|v|_{H^1(T)}^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}.$$

定理3.1 设 $u(x,t)\in C^1(0,T;W_\infty^3(\Omega)\cap H^4(\Omega))$ 为问题(3)的解，$\widehat{u}(x,t)\in H^3(\Omega)$ 为(8)式的解。若 $h\le h_0$, $N_k(y)$, $N_{kl}(y)\in W_\infty^2(Q)\,(k,l=1,2)$，则

$$\|u_\varepsilon(x,t)-u_{h_0}^{\varepsilon,h}\|_{1,h_0}\le C(\varepsilon^{\frac12}+h+h_0^2).$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}
&\|u_\varepsilon(x,t)-u_{h_0}^{\varepsilon,h}\|_{1,h_0}\\
=\ &\|u_\varepsilon(x,t)-u_\varepsilon^I(x,t)+u_\varepsilon^I(x,t)-u_{h_0}^{\varepsilon,h}\|_{1,h_0}\\
\le\ &\|u_\varepsilon(x,t)-u_\varepsilon^I(x,t)\|_{1,h_0}+\|u_\varepsilon^I(x,t)-u_{h_0}^{\varepsilon,h}\|_{1,h_0}\\
\le\ &C\varepsilon^{\frac12}+\|u-\widehat{u}_{h_0}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\varepsilon\Big\|(N_k-N_k^h)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\\
&+\varepsilon\Big\|N_k^h\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial\widehat{u}_{h_0}}{\partial x_k}\Big)\Big\|_{1,h_0}+\varepsilon^2\Big\|(N_{kl}-N_{kl}^h)\frac{\partial^2u}{\partial x_k\partial x_l}\Big\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\\
&+\varepsilon^2\Big\|N_{kl}^h\Big(\frac{\partial^2\widehat{u}_{h_0}}{\partial x_k\partial x_l}-\frac{\partial^2u}{\partial x_k\partial x_l}\Big)\Big\|_{1,h_0}\\
\triangleq\ &C\varepsilon^{\frac12}+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5.
\end{aligned}$$

对上面定义的 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，可分别估计如下：

对于 A_1，由引理3.3可得 $A_1\le C(h^2+h_0^2)$。

对于 A_2，有

$$\begin{aligned} A_2 &\le C\varepsilon \max_{1\le k\le 2}\left\{|N_k-N_k^h|_{1,\Omega}|u|_{L^2(0,T;W^1_\infty(\Omega))}+|N_k-N_k^h|_0|u|_{L^2(0,T;W^2_\infty(\Omega))}\right\}\\ &\le C\varepsilon \max_{1\le k\le 2}\left\{\varepsilon^{-1}|N_k-N_k^h|_{1,Q}|u|_{L^2(0,T;W^1_\infty(\Omega))}+|N_k-N_k^h|_{L^2(Q)}|u|_{L^2(0,T;W^2_\infty(\Omega))}\right\}\\ &\le C \max_{1\le k\le 2}\left\{h|N_k|_{2,Q}|u|_{L^2(0,T;W^1_\infty(\Omega))}+\varepsilon h^2|N_k|_{2,Q}|u|_{L^2(0,T;W^2_\infty(\Omega))}\right\}\\ &\le C(h+\varepsilon h^2)\le C(h+\varepsilon^2+h^4)\le C(h+\varepsilon^2). \end{aligned}$$

同样，对于 A_3, A_4, A_5 分别有

$$A_3\le C(\varepsilon h_0+h_0^2+h^2)\le C(\varepsilon^2+h_0^2+h^2),$$

$$A_4\le C(\varepsilon^2h^2+\varepsilon h)\le C(\varepsilon^4+h^4+\varepsilon^2+h^2)\le C(\varepsilon^2+h^2),\quad A_5\le C\varepsilon^2.$$

综上可知，$\|u_\varepsilon(x,t)-u_{h_0}^{\varepsilon,h}\|_{1,h_0}\le C(\varepsilon^{\frac12}+h+h_0^2)$。 **证毕**

致谢：作者真诚感谢审稿人和编辑提出宝贵的修改意见。

参考文献：

[1] Doina C, Patrizia D. An Introduction to Homogennization[M]. New York: Oxford University Press, 1999

[2] Chen J R, Cui J Z. Two-scale FEM for elliptic mixed boundary value problemes with small periodic coefficients[J]. Journal of Computational Mathematics, 2001, 19(5): 549-560

[3] 宋士仓，崔俊芝，刘红生. 复合材料稳态热传导问题多尺度计算的一个数学模型[J]. 应用数学，2005, 18(4): 560-566
Song S C, Cui J Z, Liu H S. A new model of multi-scale computation for steady heat transfer equation of composite materials[J]. Mathematics Applicata, 2005, 18(4): 560-566

[4] Cao L Q, Cui J Z. Asymptotic expasions and numerical algorithms of eigenvalues and eigenfunctions of the Dirichlet problem for second order elliptic equation in perforated[J]. Numerical Mathematics, 2004, 96: 525-581

[5] Chen J R, Cui J Z. A multicale finite element method for elliptic problems with oscillatory coefficients[J]. Mathematics of Comptation, 2004, 50: 1-13

[6] 宋士仓，崔俊芝. 小周期型复合材料稳态热传导问题的一种双尺度渐近展开收敛性分析[J]. 数学物理学报，2007, 27A(4): 682-687
Song S C, Cui J Z. The convergence of a multi-scale asymptotic expansion for the steady heat transfer problem of periodic composite materials[J]. Acta Mathematica Scientia, 2007, 27A(4): 682-687

[7] He W M, Cui J Z. A local error estimate of the method of multi-scale asymptotic expansions for elliptic problems with rapidly coefficients[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 329: 547-556

[8] Chen Z M, Hou T Y. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients[J]. Mathematics of compution, 2002, 72(242): 541-576

[9] Ming P B, Zhang P W. Analysis of the heterogenous multiscale method for parabolic homogenization problems[J]. Math Comput, 2006, 76(257): 153-177

[10] 陈培敏，严宁宁. 小周期结构Helmholtz方程的多尺度计算[J]. 工程数学学报，2004, 21(8): 145-149
Chen P M, Yan N N. Heterogeneous multi-scale method for Helmholtz equation with period micro-structure[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21(8): 145-149

[11] 王自强，宋士仓，曹俊英. 小周期复合材料瞬时热传导问题的一种双尺度渐近展开收敛分析[J]. 高校应用数学学报，2008, 23(2): 145-152
Wang Z Q, Song S C, Cao J Y. Convergence of two-scale asymptotic expansion for heat transfer problem of small periodic materials[J]. Applied Mathematics: a Journal of Chinese Universities, 2008, 23(2): 145-152

[12] Vidar T. Galerkin Finite Methods for Parabolic Problems[M]. New York: Springer, 1997
[13] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. New York: North-Holland, 1978

Two-scale FEM Analysis for Parabolic Equations with Small Periodic Coefficients

CAO Jun-ying[1,2], WANG Zi-qiang[2,3], SONG Shi-cang[4]

(1- School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005;
2- College of Science, Guizhou University for Nationalities, Guiyang 550025;
3- Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Academy of Mathematics and Systems Sciences, CAS, Beijing 100190;
4- Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052)

Abstract: We study the parabolic equation with small periodic coefficients in a smooth convex domain of two-dimensional space and derive a semi-discrete two-scale finite element approximation in the paper. In the whole domain, we solve the homogenization problem with a quadratic element. In the reference cell, we solve the auxiliary problem with a linear element. Using the obtained finite element solutions to replace the solutions in the multi-scale asymptotic expansion, we get a semi-discrete two-scale finite element scheme for the original problem. Using the multi-scale asymptotic expansion and the finite element theory, we prove that the new scheme is convergen.

Keywords: multiscale asymptotic expansion; two-scale FEM; parabolic equations; composite materials

Received: 14 Jan 2008. **Accepted:** 19 Feb 2009.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10471133); the Key Project of the National Natural Science Foundation of China (90405015; 10590353).